Test di autovalutazione di **Matematica Discreta**
C.L. **ITPS – Track A–L**
18 Novembre 2024
Svolgimenti

***Esercizio* 1.** Quanti sono i sottinsiemi di $\{1, \ldots, 10\}$ che contengono almeno un numero dispari? Quanti quelli che contengono esattamente due numeri dispari?

***Svolgimento Esercizio* 1.** I sottinsiemi di $A := \{1, \ldots, 10\}$ sono complessivamente 2^{10}. Quelli costituiti da soli numeri pari sono precisamente i sottinsiemi di $B := \{2, 4, 6, 8, 10\}$, e ce ne sono 2^5. Perciò, gli elementi di $\wp(A) \setminus \wp(B)$ sono precisamente i sottinsiemi cercati, e ce ne sono $|\wp(A)| - |\wp(B)| = 2^5(2^5 - 1) = 32 \cdot 31 = 992$.

Per la seconda domanda, possiamo scegliere in $\binom{5}{2}$ i numeri dispari che devono comparire. Per ciascuna scelta di tali numeri, possiamo completare il sottinsieme a uno di quelli cercati unendolo a un qualunque sottinsieme di B, e quindi il numero complessivo è $\binom{5}{2}2^5 = 320$. □

***Esercizio* 2.** Sia $s = (s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la successione in $\mathbb{R}$ definita ricorsivamente ponendo $s_0 := 17$, $s_1 := 11$ e, per $n \geqslant 2$,

$$s_n := s_{n-1} + 6s_{n-2}.$$

Verificare che la forma chiusa di s_n è

$$s_n := 3^{n+2} + (-1)^n 2^{n+3} \quad (\forall n \in \mathbb{N}).$$

***Svolgimento Esercizio* 2.** Possiamo usare il principio di induzione: per la base, basta verificare che la formula applicata per $n = 0$ ridà il valore $s_0 = 17$. Per i valori di n successivi, prima dobbiamo testare direttamente la validità della formula per $n = 1$ (perchè?), e poi applicare il passo induttivo per $n \geqslant 2$: supponiamo che la formula sia vera per n e controlliamo che

$$s_{n+1} = 3^{n+3} + (-1)^{n+1}2^{n+4}.$$

Si ha

$$\begin{aligned} s_{n+1} &= s_n + 6s_{n-1} = 3^{n+2} + (-1)^n 2^{n+3} + 6(3^{n+1} + (-1)^{n-1}2^{n+2}) \\ &= 3^{n+2} + 2 \cdot 3^{n+2} + (-1)^n(2^{n+3} - 3 \cdot 2^{n+3}) \\ &= 3^{n+3} + (-1)^n(-2^{n+4}) = 3^{n+3} + (-1)^{n+1}2^{n+4}. \end{aligned}$$

□

***Esercizio* 3.** Determinare l'insieme S delle soluzioni dell'equazione diofantea

$$24x + 56y = 120.$$

Esiste il minimo dell'insieme $A := \{|x + y| \mid (x, y) \in S\}$? Se sì, qual è e perchè? Se non esiste, perchè?

***Svolgimento Esercizio* 3.** L'equazione è equivalente a quella che si ottiene dividendo ambo i membri per 8 ($= MCD(24, 56)$), cioè $3x + 7y = 15$. Una soluzione particolare di questa equazione può essere ottenuta tramite l'algoritmo euclideo, ma qui una soluzione evidente è $(-2,3)$, per cui la soluzione generale è l'insieme

$$S := \{(-2,3) + h(7,-3) \mid h \in \mathbb{Z}\} = \{(-2+7h,\, 3-3h) \mid h \in \mathbb{Z}\}.$$

L'insieme $A = \{|-2+7h+3-3h| \,:\, h \in \mathbb{Z}\} = \{|4h+1| \,:\, h \in \mathbb{Z}\}$ è un sottinsieme non vuoto di $\mathbb{N}$, per cui ammette certamente minimo. In realtà, è facile vedere che tale minimo si ottiene precisamente per $h = 0$, e quindi $\min A = 1$. □

***Esercizio* 4.** Poniamo $A := \{1,2,3,4\}$, $B := \{1,2,3\}$ e $C := \{f \mid f : A \to B\}$.

(1) Quanti sono gli elementi di C?
(2) Quante sono le funzioni iniettive $A \to C$?
(3) Quant'è la cardinalità di $\{f \in C \mid f \text{ suriettiva}\}$?

***Svolgimento Esercizio* 4.** Un elemento di C è una funzione da A in B, che può essere rappresentata da un array bidimensionale $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \end{pmatrix}$, dove gli elementi b_i sono presi in $B = \{1,2,3\}$. Per ciascuno di essi abbiamo perciò 4 scelte indipendenti, e per il principio di moltiplicazione ci sono $3^4 = 81$ funzioni, cioè elementi di C.

Avendo appena visto che C è un insieme con 81 elementi, una funzione da A a C può essere rappresentata come prima come un array $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \end{pmatrix}$, dove stavolta gli elementi c_i sono scelti tra gli 81 elementi di C. Se vogliamo che però la funzione sia iniettiva, devono essere a due a due distinti, per cui abbiamo 81 modi di scegliere c_1, ma poi 80 modi di scegliere c_2, 79 di scegliere c_3 e 78 di scegliere c_4. In definitiva, ci sono $D(81,4) = 81 \cdot 80 \cdot 79 \cdot 78 = 39929760$ funzioni iniettive di A in C.

Per il terzo punto, la maniera più semplice per affrontarlo è la seguente: rappresentiamo una funzione $A \to B$ tramite il modello d'occupazione, per cui guardiamo agli elementi di A come a delle biglie numerate, e agli elementi di B come a delle scatole numerate. Una funzione suriettiva diventa uno dei modi di collocare le 4 biglie nelle 3 scatole, in modo da non lasciare nessuna scatola vuota. Avendo 4 biglie e solo 3 scatole, necessariamente una scatola dovrà contenere 2 biglie, e le altre due una sola biglia. Possiamo scegliere in $\binom{4}{2} = 6$ modi la coppia di biglie, e in 3 modi la scatola in cui riporle. A questo punto, le rimanenti 2 biglie possono essere collocate in esattamente 2 modi. Visto che le scelte sono indipendenti, il numero complessivo di modi di riporre le biglie nelle scatole è $6 \cdot 3 \cdot 2 = 36$, che è quindi il numero cercato.

Un altro modo per rispondere al problema è il seguente (che usa in modo non dichiarato il principio di inclusione-esclusione): dagli 81 elementi di C dobbiamo cancellare gli elementi che non sono funzioni suriettive, cioè le funzioni $A \to B$ la cui immagine ha cardinalità $\leqslant 2$. Ciascuna di esse può essere vista come una funzione da A in un 2-sottinsieme di B; ci sono 3 possibili scelte per tale sottinsieme, e per ciascuna scelta ci sono $2^4 = 16$ funzioni da A in esso, per cui stiamo così individuando 48 funzioni. In realtà, ne stiamo escludendo troppe: stiamo infatti contando due volte ciascuna delle tre funzioni costanti (p.es.: la funzione costante $a \to 1$ è sia una delle funzioni contate scegliendo il sottinsieme $\{1,2\} \subseteq B$ che una delle funzioni contate scegliendo il sottinsieme $\{1,3\} \subseteq B$). In effetti la cardinalità dell'insieme delle funzioni la cui immagine ha cardinalità 2 è, per il principio di addizione, $48 - 3 = 45$ (ci sono esattamente 3 funzioni costanti da $A \to B$). In definitiva, il numero di funzioni suriettive è $81 - 48 + 3 = 36$.

Un terzo modo, più delicato, per rispondere al problema è il seguente: abbiamo 81 funzioni in tutto, e invece di costruire quelle suriettive contiamo quelle non suriettive direttamente, dopodichè dalla differenza otterremo il numero di funzioni suriettive. Guardiamo di nuovo al modello di occupazione: siccome 4 biglie devono essere collocate in 3 scatole distinte, ma almeno una deve rimanere vuota, le possibilità che abbiamo sono

- tutte le biglie sono collocate in una stessa scatola, che può essere scelta in tre modi. Abbiamo individuato 3 funzioni non suriettive (le tre funzioni costanti);
- 3 biglie collocate in una scatola, e la rimanente in una delle due scatole rimaste: abbiamo $\binom{4}{3} = 4$ modi per scegliere le tre biglie, e 3 modi per scegliere la scatola in cui collocarle (12 scelte differenti); poi abbiamo 2 modi per scegliere in quale scatola collocare la biglia rimanente. In tutto, abbiamo individuato 24 funzioni;
- (il punto più delicato): una scatola resta vuota, e le rimanenti due scatole contengono ciascuna due biglie. In quanti modi possiamo farlo? Abbiamo 3 modi per scegliere quale scatola resta vuota; abbiamo poi $\binom{4}{2} = 6$ modi per scegliere quali biglie inserire nella prima (cioè: quella corrispondente alla scatola contrassegnata dal numero più piccolo) delle due scatole rimanenti, e le altre due biglie andranno nell'ultima scatola. In questa maniera, abbiamo $3 \cdot 6 = 18$ scelte.

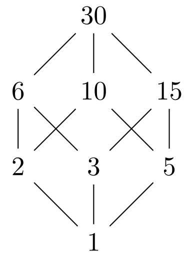
In tutto, abbiamo costruito direttamente $3 + 24 + 18 = 45$ funzioni non suriettive, per cui il numero cercato è, di nuovo, $81 - 45 = 36$. $\square$

***Esercizio* 5.** Sia $D(30) := \{d \in \mathbb{N} : \quad d \mid 30\}$ (insieme dei divisori positivi di 30), e consideriamo su di esso la relazione $a\rho b :\iff a \mid b$.

(1) Verificare che la struttura $(D(30), \rho)$ è un poset
(2) Disegnarne il diagramma di Hasse
(3) Detto $A := \{3, 6, 15\}$, dire se A ammette massimo o minimo, specificando qual è.

***Svolgimento Esercizio* 5.** Il primo punto è un ripasso di quanto visto in generale: già sappiamo che $(\mathbb{N}, \mid)$ è un insieme parzialmente ordinato, e siccome $D(30) \subseteq \mathbb{N}$, automaticamente $(D(30), \rho)$ è un poset (le proprietà riflessiva, antisimmetrica e transitiva valgono su tutto $\mathbb{N}$, per cui in particolare valgono su un suo sottinsieme). Per esempio, per la proprietà antisimmetrica si ha che $\forall a, b \in D(30)$, se $a\rho b$ e $b\rho a$ allora esistono $h, k \in \mathbb{Z}$ tali che $b = ha$ e $a = kb \Rightarrow b = ha = h(kb) = (hk)b \Rightarrow hk = 1 \Rightarrow h = k \in \{+1, -1\}$; dato però che $a, b > 0$, e $b = ha \Rightarrow h = 1 \Rightarrow b = a$.

Per il secondo punto: dato che $30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$, l'insieme $D(30)$ ha cardinalità 8, e precisamente è $D(30) = \{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30\}$. Certamente $1 \in D(30)$ e $1 \mid d$ per ogni $d \in D(30)$. 1 è il minimo di $D(30)$, e occuperà il livello più basso di tutto il diagramma di Hasse. Subito sopra 1 ci saranno 2, 3 e 5: non sono multipli di altro che 1. Al livello successivo ci saranno $6, 10, 15$, e all'ultimo livello l'elemento 30. Il diagramma perciò è



(si noti: la forma è esattamente quella del diagramma di Hasse di $(\wp(\{1,2,3\}),\subseteq)$).

Infine: l'insieme $\{3,6,15\}$ ammette un minimo, che è precisamente 3, ma non un massimo: dovrebbe essere un elemento dell'insieme, e quindi certamente non può essere 3; d'altra parte, poichè $6 \nmid 15$ e $15 \nmid 6$, non può essere nè 6 nè 15. Si noti che ciò accade nonostante un massimo $D(30)$ lo ammetta (l'elemento 30): il fatto che un poset ammetta un minimo o un massimo (assoluto) non comporta che ogni suo sottinsieme non vuoto ammetta l'uno o l'altro. $\square$

***Esercizio* 6.** Determinare il MCD tra 86553 e 79839 e una coppia di coefficienti per esprimerlo nella forma di Bezout.

***Svolgimento Esercizio* 6.** Ovviamente, si usa l'algoritmo euclideo, il che ci darà anche una coppia di coefficienti di Bezout per esprimere $d = MCD(86553, 79839)$ come combinazione lineare intera dei due numeri di partenza. Si ha

$$\begin{aligned}
86553 &= 1 \cdot 79839 + 6714 \\
79839 &= 11 \cdot 6714 + 5985 \\
6714 &= 1 \cdot 5985 + 729 \\
5985 &= 8 \cdot 729 + 153 \\
729 &= 4 \cdot 153 + 117 \\
153 &= 1 \cdot 117 + 36 \\
117 &= 3 \cdot 36 + 9 \\
36 &= 4 \cdot 9 + 0
\end{aligned}$$

per cui l'ultimo resto non nullo, 9, è anche il MCD cercato. Per esprimerlo come combinazione lineare dei due numeri iniziali, sfruttiamo la tabella ottenuta coinvolgendo la codifica iniziale di 86533 come $(1,0)$ e quella di 79839 come $(0,1)$. Si ha

q	86553	79839	$(1,0)$	$(0,1)$
1	79839	6714	$(0,1)$	$(1,-1)$
11	6714	5985	$(1,-1)$	$(-11,12)$
1	5985	729	$(-11,12)$	$(12,-13)$
8	729	153	$(12,-13)$	$(-107,116)$
4	153	117	$(-107,116)$	$(440,-477)$
1	117	36	$(440,-477)$	$(-547,593)$
3	36	9	$(-547,593)$	$(2081,-2256)$

per cui una coppia di coefficienti di Bezout è $(2081, -2256)$. $\square$